ELEN ANDREA JANZEN, Würzburg/Curitiba - Brasilien

# Zielgerichtete Hilfen beim Beweisen mit DGS[1]

Diesem Vortrag liegt ein Projekt zugrunde, das das Beweisen in der Geometrie in einer computergestützten dynamischen Umgebung untersucht und analysiert. Dabei wird die Sichtweise des Lehrers oder Universitätsdozenten eingenommen, der das Lernen des Beweisens bei Studierenden unterstützen und fordern möchte. Beweise werden dabei nicht nur als ein formales Endprodukt, sondern vielmehr als ein Prozess auf dem Weg zum Verständnis von Geometrie angesehen. Das Arbeiten mit Beweisen soll dazu beitragen, das „mathematische Denken" zu entwickeln.

Die Kompetenzen und Fähigkeiten, die heutzutage vom Lehrer gefordert werden, sind nicht dieselben wie vor Jahrzehnten. Heutzutage ist er nicht nur ein Übermittler von Wissen - er hat vielmehr eine „formative" Rolle - das Formen des „Mathematisches Denkens".

Das Mathematische Denken beschreiben Watson und Mason (in Ball, 2002) mit: Illustrieren, Spezialisieren; Vollenden, Löschen, Korrigieren, Vergleichen, Sortieren, Organisieren, Ändern, Variieren, Verändern, Generalisieren, Vermuten, Erklären, Rechtfertigen, Überprüfen, Überzeugen. Barbara Ball (2002) erläutert es in ähnlicher Weise und behauptet dass das Mathematische Denken während des Verarbeitens der Dinge erfolgt.

Das kommt auch sehr nahe an das heran, was Edwards (1990) für einen Prozess des Beweisens hält. Er nennt es "Territory before proof", das bedeutet Denkarten und Handlungen festzulegen, die die Suche Mathematischen Wissens unterstützen. Dabei sieht er folgende Elemente in diesem „Territory":

- Finden von Mustern, Regelmäßigkeiten und Invarianten;
- Beschreiben solcher Muster, was auf unterschiedliche Arten getan werden kann;
- Vermutungen aufstellen;
- Validieren durch induktive Argumentation (spezifische Fälle überprüfen);
- Validieren durch deduktive Argumentation (oder Beweis) - verursachen einer Argumentation, um zu zeigen, warum eine Verallgemeinerung richtig ist.

[1] DGS = Dynamische Geometrie Software

Bei diesem Prozess kann DGS einen Beitrag leisten. Der dynamische Aspekt des DGS, d. h. das Variieren von Objekten (Zugmodus), kann den Studenten bei diesem Prozess helfen. Die Objekte, die mit einem DGS konstruiert werden, haben einen anderen Status als einfache Zeichnungen; sie beginnen, generische Beispiele zu sein, mit der Möglichkeit der dynamischen Erforschung der Eigenschaften. Auf diese Weise liefern sie die Visualisierung von mehreren verschiedenen Darstellungen der gleichen Kategorie von Figuren. Die Visualisierung fokussiert deshalb auf das Verständnis von Figuren, und dieses verlangt das „Lernen des Sehens und Lesen“ dieser Figuren. Deshalb spielen Figuren eine intuitive und heuristische Rolle in der geometrischen Darstellung. Sie erlauben es, eine Situation im größeren Umfang zu analysieren und damit verschiedene Aspekte eines Problems zu erforschen (Duval, 1999). So gilt es u.a. Subkonfigurationen zu begreifen, die die Schlüsselideen enthalten und letztlich zur Beweisidee führen sollen. Es ist allerdings nicht einfach, einen Überblick über die Eigenschaften von Figuren im größeren Rahmen zu erhalten.

Für das Beweisen ist DGS ein Werkzeug, das es den Studenten ermöglicht, zu erforschen und Vermutungen aufzustellen sowie eine Beweisidee zu finden. Die Frage dabei ist, welche Rolle der Lehrer dabei spielt, damit dieser Prozess bei den Studenten in der gewünschten Weise erfolgt. Wie wird der Student dazu befähigt, seine Kenntnisse sachgerecht einzusetzen?

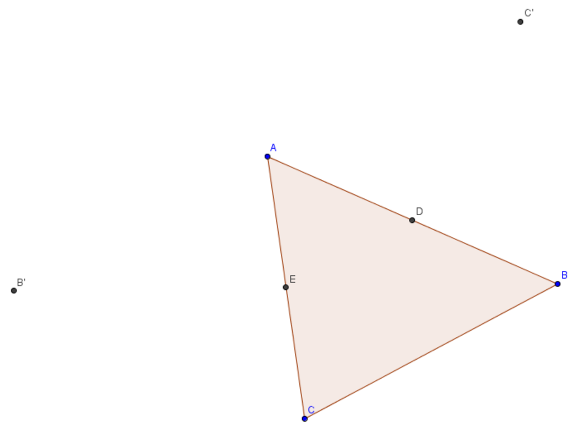
## 1. Empirische Studie

Das Ziel einer empirischen Studie ist es, eine beschreibende Analyse der Interventionen des Lehrers zu erhalten, während er dem Studenten Hilfestellungen bei Beweisfindungen in der Geometrie gibt. Dabei wird ein DGS eingesetzt, das diese Beweisfindung unterstützen soll.

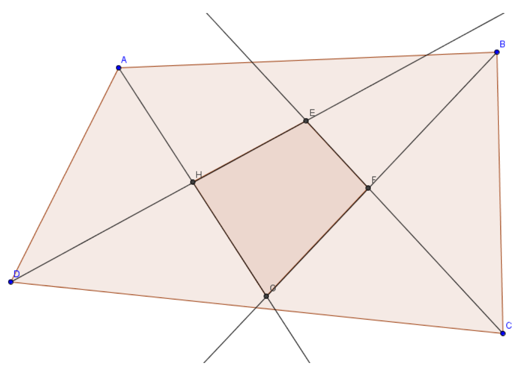
Es soll analysiert werden, wie der Lehrer Eigenschaften der Software (wie etwa den dynamischen Aspekt – Zugmodus – und die Visualisierung überhaupt) benutzt, um diesen Prozess bei Studenten anzuregen.

Dazu wurden zunächst zwei Aufgaben gewählt, die Studie wurde mit drei Dozenten und drei Studenten durchgeführt. Im Mittelpunkt der Beobachtung stand der Lehrer, der dem Studenten bei der Beweisfindung und –führung hilft. Es wurden Videoaufzeichnungen angefertigt, die gerade transkribiert werden.

Die erste Aufgabe lautet: „ABC ist ein Dreieck, D ist der Mittelpunkt der Strecke [AB] und E ist der Mittelpunkt der Strecke [AC]. Die Punkte B’und C’sind Punksymmetrisch zu B und C bzgl. Der Punkte E und D. Variieren Sie die Ecken des Dreiecks und Beobachten Sie die Beziehung zwischen den Punkten B‘, A und C‘. Welche Beziehung vermuten Sie? Begründen Sie Ihre Vermutung.“




Die zweite Aufgabe: ABCD ist ein (konvexes) Viereck mit den Winkelhalbierenden der vier Innerwinkel. Die Schnittpunkte dieser Winkelhalbierenden werden mit E, F, G und H bezeichnet. Variieren Sie die Punkte A, B, C, D. Was geschieht mit dem Viereck EFGH? Welche besonderen Vierecke können sich für EFGH ergeben? Warum? Können sich die Winkelhalbierenden auch in EINEM Punkt schneiden? Wann ist das der Fall? Äußeren Sie Vermutungen und versuchen Sie, diese zu beweisen.




## 2. Vorüberlegungen

Interessant waren die unterschiedlichen Strategien, mit denen die Studierenden die Aufgaben lösten, mit denen sie die Vermutungen zu beweisen suchen. Die Studenten waren in der Lage, ihre Ideen auszudrücken, sie konnten also einen Weg angeben, um ein Beweis zu finden, aber alle brauchten an bestimmten Stellen die Hilfe des Lehrers, um den nächsten Schritt durchführen zu können. Diese Hilfen waren von unterschiedlicher Art: Sie waren manchmal stärker organisatorische geprägt. So beschritten die Studenten gelegentlich Wege und „verloren die Orientierung“ im Hinblick auf das Ziel. Der Dozent musste dann den augenblicklichen Stand in einen größeren Rahmen einordnen. Einige Beispiele für solche organisatorischen Hinweise:

- „Also, sie haben jetzt die Vermutung geäußert, jetzt müssen Sie sich vielleicht mal überlegen, was Sie dazu eigentlich zeigen müssen.“
- „Genau, damit haben Sie jetzt gezeigt was Sie eben zeigen wollten. Nützt ihnen das was?“
- „Allerdings sind wir jetzt natürlich ein bisschen von der Ausgangsfrage weg, es geht darum, dass das Viereck etwas Besonderes ist.“

Anderseits gaben die Hilfen des Dozenten eine mathematische, inhaltliche Orientierung. Die inhaltlichen Hinweise können mit Visualisierung und dem Entdecken oder Konstruieren von Subkonfigurationen einhergehen, oder sie stützen sich auf das Variieren; d.h. auf die Möglichkeit der Visualisierung mit Hilfe des Zugmodus. Dadurch konnten mathematische Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge erkannt werden, die etwa in den Subkonfigurationen auftraten. Dies kann dann zum nächsten Beweisschritt führen. Beispiel:

- „Gut, wenn Sie jetzt die Punkte B und C‘ verbinden, das haben Sie ja gemacht durch diese zusätzliche Hilfslinie, ist jetzt eine neue Figur entstanden. Können wir über diese Figur vielleicht etwas sagen?“

Hier spielen Visualisierung und das Erstellen von Subkonfigurationen eine Rolle. Nachdem der Student die Dreiecke erkannte und derer Kongruenz bemerkte, zieht er richtige Schlüsse, um zum Beweis zu kommen.

Die Ergebnisse dieser empirischen Untersuchung liegen noch nicht vor. Das wird der nächste Schritt sein. Insbesondere werden die Hinweise der Dozenten ausführlich analysiert und beschrieben um sie mit theoretischen Vorüberlegungen in Beziehung zu setzten.

## Literatur


Ball, B. (2002). What is Mathematical Thinking? *Mathematics Teaching*, 181, 17 – 19.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. In: *Proceedings of PME 21*, Vol.1, 3 -26.

Edwards, L. D. (1990). Exploring the territory before proof: students‘generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2*, 187 - 215.